RECHERCHE D’UNE FORMULE ALGEBRIQUE
Fiche descriptive

Niveau d’enseignement :	Classe de seconde (ou de première)
Type d’activité :	Problème ouvert
Durée :	une heure
Outils :	Un tableur
Compétences TICE :	Utiliser des fonctions simples d’un tableur : entrer une formule, fonction racine( ), poignée de recopie …
Compétences mathématiques :	Emettre une conjecture. Montrer une égalité en développant deux expressions algébriques.
Place dans la progression, moment de l’étude :	En début d’année. Initiation à l’utilisation d’un tableur pour conjecturer.

Cet exercice sera une occasion pour introduire (ou revoir) la notion d’identité.

On pourra également rappeler la différence entre un raisonnement inductif et un raisonnement déductif et éventuellement proposer l’exercice suivant pour illustrer les dangers d’un raisonnement inductif hâtif :
« Le nombre $n^2 - n + 41$ est-il premier pour tout entier naturel n ? »

RECHERCHE D’UNE FORMULE ALGEBRIQUE
Fiche professeur

Mise en œuvre en classe de seconde

Pour une utilisation en seconde, l’énoncé est volontairement directif : pour trouver l’expression factorisée de P, il est conseillé aux élèves d’observer le lien entre n, $n+3$ et P.

Mise en œuvre en classe de première S

Pour une utilisation en première S, on pourra donner l’énoncé suivant, plus ouvert, sans guider les élèves ni dans la démarche, ni dans l’utilisation du tableur.

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$

Coïncidence ou pas ?

Les élèves de première S auront ainsi une plus grande liberté d’approche et pourront faire émerger différentes stratégies dans la recherche d’une formule :

- deviner, sur tableur, un lien entre le carré obtenu et les entiers n et $(n+3)$
- s’intéresser au produit des quatre entiers et chercher à l’aide du tableur comment il peut être de la forme x^2-1, c’est-à-dire $(x-1)(x+1)$, autrement dit produit de deux entiers qui diffèrent de 2 …

Pour la démonstration de l’identité $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$, l’expérience montre que la plupart des élèves développent chaque membre pour établir l’égalité. Voici toutefois une stratégie intéressante mise en œuvre par un élève, comme quoi les élèves peuvent nous surprendre !

- Partir du membre de gauche et le développer en laissant apparent le produit $n(n+3)$ puisqu’il apparaît aussi dans le membre de droite :
$$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)\underbrace{(n+1)(n+2)}+1=n(n+3)\left(n^2+3n+2\right)+1$$
- Poursuivre avec n^2+3n+2, en faisant apparaître le produit $n(n+3)$
$$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)[n(n+3)+2]+1=[n(n+3)]^2+2n(n+3)+1$$
- Reconnaître une identité remarquable, suggérée d’ailleurs par l’expression à obtenir, à savoir $[n(n+3)+1]^2$.

RECHERCHE D’UNE FORMULE ALGEBRIQUE

Fiche élève

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$

Coïncidence ou pas ?

On pose $P = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ où n désigne un entier naturel non nul.

L’objectif de cet exercice est de trouver, si elle existe, une écriture de *P* sous la forme d’un carré.

1) Calculs

Calculer P pour différentes valeurs de n.

2) Conjecture

a) Que dire de P pour toutes les valeurs de n testées ?

b) Imaginer une formule qui permettrait de calculer P à l’aide de n et de $(n+3)$ uniquement.
Ne pas hésiter à utiliser le tableur pour tester la formule trouvée.

Appeler le professeur pour valider votre conjecture

3) Démonstration

a) Développer $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$.

b) Développer la formule obtenue à la question **2)b)**.

c) Donner l’écriture de P sous forme d’un carré.

Indications

Excel ou OpenOffice calc

<u>Pour calculer *P* pour différentes valeurs de *n*</u>

Compléter les cellules comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	n	n+1	n+2	n+3	P
2	1				
3	2				
4					

➢ Pour obtenir des valeurs de n, faire apparaître la poignée de recopie **+** en bas à droite des cellules A2 et A3 sélectionnées puis étirer vers le bas jusqu’à une cellule de votre choix.

➢ En B2 taper la formule : =A2+1 pour obtenir le nombre $n+1$, en C2 taper la formule : = A2+2 pour obtenir le nombre $n+2$ et ainsi de suite.

En E2 taper : =A2*B2*C2*D2+1

Sélectionner les cellules B2 à E2 puis étirer les formules vers le bas à l’aide de la poignée de recopie.

<u>Pour conjecturer</u>

➢ Pour obtenir la racine carrée de P en F2, taper : = racine(E2) .