Éléments de correction de l'épreuve officielle
Mardi 17 mars 2009

Exercice n°1 Triangle à bord carré

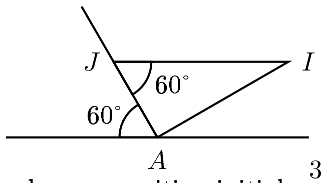
5 points

On numérote les lignes horizontales à partir de 1 au sommet ; par récurrence on établit que la n-ième ligne compte $2n-1$ nombres et se termine par n^2 grâce à $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. On vérifie $43^2 < 1921 < 44^2$; comme $1021 = 1936 - 15$, le nombre situé sous 1921 est $2025 - 16$ c'est-à-dire 2009 !

Exercice n°2 Le cube lâche le bouillon

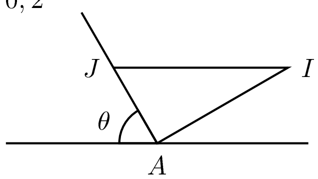
8 points

1. La hauteur de l'eau dans le cube posé à l'horizontal est 30,5 cm. Le bord de l'ouverture est, une fois le cube basculé, situé à 30 cm (50 cm - 20 cm) du sol. **Le liquide va donc déborder**.
2. Calculons le volume maximal contenu dans le cube en position inclinée. Cette situation correspond à évaluer le volume d'un prisme droit de hauteur 1 m et de surface de base le triangle AIJ rectangle en A et tel que $AI = 0,3$ m, $\widehat{IJA} = 60$ degrés. La longueur AJ vaut : $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \times AI = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$ m, d'où l'aire du triangle est égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{10} \times \dfrac{\sqrt{3}}{10} = \dfrac{3\sqrt{3}}{200}$ m^2, et le volume correspondant est environ 29,98 L.



La hauteur de l'eau une fois le cube revenu dans sa position initiale $\dfrac{3\sqrt{3}}{200}$ m $= \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\approx 2,60$ cm.

3. Soit θ l'angle d'inclinaison. Le triangle AIJ est rectangle en A, $AI = 0{,}3$ m et $\widehat{AJI} = \theta$.
On a alors : $AJ = \dfrac{1}{tan(\theta)} \times AI = \dfrac{0,3}{tan(\theta)}$. Puisqu'il reste 100 L, l'aire du triangle AIJ est 0,1 m^2.
De là, $\frac{1}{2} \times AI \times AJ = 0,1$ donc $tan(\theta) = \dfrac{0,3^2}{0,2} = 0,45$, et $\theta \approx 24$ degrés.



Exercice n°3 essence

5 points

	SP 98	SP 95
Consommation en L	129,61	120,44
Kilométrage	1846,5	1563
Consommation en L par km	0,070	0,077
consommation en L pour 100 km	7,019	7,706
Prix au L en €	1,252	1,209
Coût en € aux 100 km	8,788	9,316

Le carburant le plus avantageux est donc le SP 98.

Exercice n°4 — Jeu en réseau

8 points

1. (a) **Méthode 1 :** En calculant les pentes des droites (OA) et (OB) :

   $O\ (0\ ;\ 0)$, $A\ (7\ ;\ 6)$ et $B(6\ ;\ 5)$. $\dfrac{6}{7} \neq \dfrac{5}{6}$ donc les points O, A et B ne sont pas alignés.

   Méthode 2 : En calculant les longueurs des segments :
   $OA = \sqrt{7^2+6^2} = \sqrt{85}$, $OB = \sqrt{6^2+5^2} = \sqrt{61}$ et $AB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Or $OA + AB \neq OB$, donc les points O, A est B ne sont pas alignés.

   (b) Si le point A a pour coordonnées $A(a\ ;\ b)$, le nombre de points du quadrillage qui se trouvent sur le segment $[OA]$ est

   $$N = PGCD(a\ ;\ b) + 1$$

   Anatole $OA = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ $L = 5$ et $N = 2$ $S = 10 \times 5 - 10 \times 2 = 30$
   Kizinga $OA = \sqrt{7^2+6^2} = \sqrt{85}$ $L = 9,2$ et $N = 2$ $S = 10 \times 9,2 - 10 \times 2 = 72$
   Bilal $OA = \sqrt{8^2+6^2} = 10$ $L = 10$ et $N = 3$ $S = 10 \times 10 - 10 \times 3 = 70$.
   Anatole a bien 30 points, Kizinga 72 points et Bilal 70 points.

   (c) Avec le point $A(8\ ;\ 5)$, on obtient le score de 74 points.
   $OA = \sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{89}$ $L = 9,4$ et $N = 2$ $S = 10 \times 9,4 - 10 \times 2 = 74$.

En utilisant un tableur, on peut obtenir la liste des scores pour la demi-finale
Formule dans la cellule B2 (à copier dans le retse du tableau) :
=10*ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A2*$A2) ;1)-10*(PGCD_ADD(B$1 ;$A2)+1)

B2 =10*ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A2*$A2);1)-10*(PGCD_ADD(B$1;$A2)+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	-6	2	12	21	31	41	51	61
3	2	2	-2	16	15	34	33	53	52
4	3	12	16	2	30	38	27	56	65
5	4	21	15	30	7	44	42	61	39
6	5	31	34	38	44	11	58	66	74
7	6	41	33	27	42	58	15	72	70
8									
9									

2. Le meilleur score est obtenu avec $A(20\ ;\ 21)$ ou $A(21\ ;\ 20)$: $S = 10 \times 29 - 10 \times 2 + 100 = 370$.
   Avec $A(23\ ;\ 24)$ ou $A(24\ ;\ 23)$: $S = 10 \times 33,2 - 10 \times 2 = 312$.
   Avec $A(18\ ;\ 24)$ ou $A(24\ ;\ 18)$: $S = 10 \times 30 - 10 \times 7 + 100 = 330$.

En utilisant un tableur, on peut obtenir la liste des scores pour la finale
Formule dans la cellule B2 (à copier dans le reste du tableau) :
=10*ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A2*$A2) ;1) -10*(PGCD_ADD(B$1 ;$A2)+1)
+SI(ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A30*$A30) ;5)=RACINE(B$1*B$1+$A30*$A30) ;100 ;0)

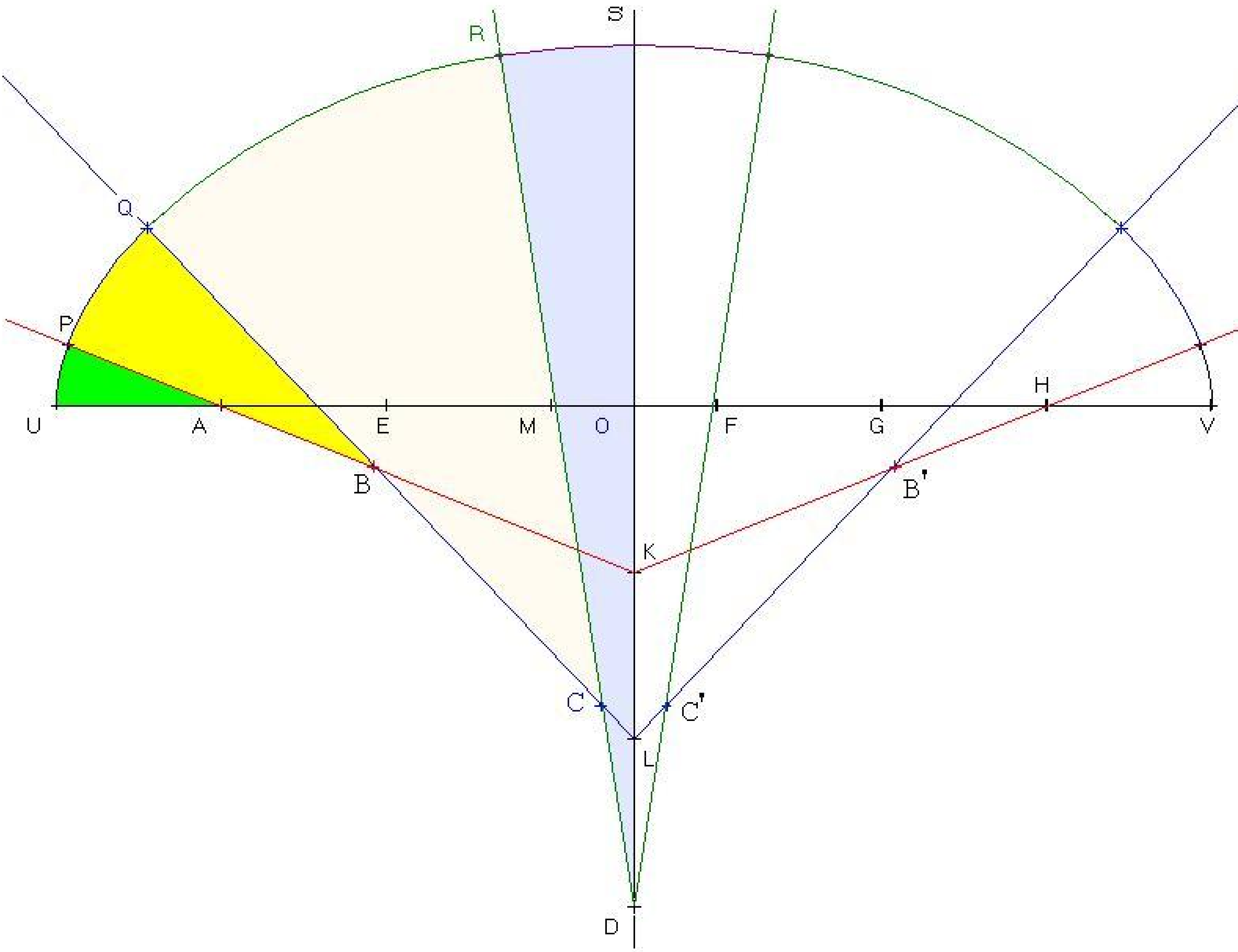
B2 =10*ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A2*$A2);1)-10*(PGCD_ADD(B$1;$A2)+1)+SI(ARRONDI(RACINE(B$1*B$1+$A30*$A30);5)=RACINE(B$1*B$1+$A30*$A30);100;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	1	-6	2	12	21	31	41	51	61	71	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
3	2	2	-2	16	15	34	33	53	52	72	72	92	92	112	111	131	131	151	151	171	171	191	191	211	211
4	3	12	16	2	130	38	27	56	65	55	84	94	84	113	123	113	143	153	142	172	182	172	202	212	202
5	4	21	15	130	7	44	42	61	39	78	78	97	76	116	116	135	115	155	154	174	154	194	194	213	193
6	5	31	34	38	44	11	58	66	74	83	52	101	210	119	129	98	148	157	167	176	146	196	206	215	225
7	6	41	33	27	42	58	15	72	170	68	87	105	64	123	122	122	141	160	120	179	179	178	198	218	177
8	7	51	53	56	61	66	72	19	86	94	102	110	119	128	77	146	155	164	173	182	192	141	211	220	330
9	8	61	52	65	39	74	170	86	23	100	98	116	94	133	131	250	89	168	167	186	165	205	204	224	163
10	9	71	72	55	78	83	68	94	100	27	115	122	210	138	146	135	164	172	101	190	199	188	218	227	216
11	10	80	72	84	78	52	87	102	98	115	31	129	126	144	142	120	159	177	176	195	114	213	212	231	330
12	11	90	92	94	97	101	105	110	116	122	129	36	143	150	158	166	174	182	191	200	208	217	126	235	244
13	12	100	92	84	76	210	64	119	94	210	126	143	40	157	154	152	250	188	146	205	183	202	221	239	138
14	13	110	112	113	116	119	123	128	133	138	144	150	157	44	171	178	186	194	202	210	219	227	236	244	253
15	14	120	111	123	116	129	122	77	131	146	142	158	154	171	48	185	183	200	198	216	214	172	231	249	248
16	15	130	131	113	135	98	122	146	250	135	120	166	152	178	185	52	199	207	194	222	290	218	246	255	243
17	16	140	131	143	115	148	141	155	89	164	159	174	250	186	183	199	56	213	211	228	206	244	242	260	198
18	17	150	151	153	155	157	160	164	168	172	177	182	188	194	200	207	213	60	228	235	242	250	258	266	274
19	18	160	151	142	154	167	120	173	167	101	176	191	146	202	198	194	211	228	65	242	239	237	254	272	330
20	19	170	171	172	174	176	179	182	186	190	195	200	205	210	216	222	228	235	242	69	256	263	271	278	286
21	20	180	171	182	154	146	179	192	165	199	114	208	183	219	214	290	206	242	239	256	73	370	267	285	262
22	21	190	191	172	194	196	178	141	205	188	213	217	202	227	172	218	244	250	237	263	370	77	284	291	279
23	22	200	191	202	194	206	198	211	204	218	212	126	221	236	231	246	242	258	254	271	267	284	81	298	296
24	23	210	211	212	213	215	218	220	224	227	231	235	239	244	249	255	260	266	272	278	285	291	298	85	312
25	24	220	211	202	193	225	177	330	163	216	330	244	138	253	248	243	198	274	330	286	262	279	296	312	89
26																									

Exercice n°5 **L'anse de panier à 7 centres**

5 points

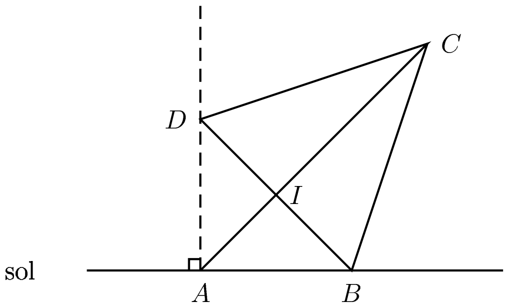
Sur une droite, on reporte bout à bout 7 segments de 3 cm : $UA = AE = EM = MF = FG = GH = HV$;
On trace la médiatrice de $[UV]$; elle coupe le segment $[UV]$ en O ;
Sur cette médiatrice on reporte $OK = KL = LD = UA = 3$ cm ;
On trace la demi-droite $[KA)$;
Le cercle de centre A passant par U coupe $[KA)$ en P et en B ;
On ne conserve que l'arc $\widehat{UP}$;
On trace la demi-droite $[LB)$;
Le cercle de centre B passant par P coupe $[LB)$ en Q et en C ;
On ne conserve que l'arc $\widehat{PQ}$;
On trace la demi-droite $[DC)$;
Le cercle de centre B passant par P coupe $[LB)$ en R ;
Ne conserver que l'arc $\widehat{QR}$;
Le cercle de centre D passant par R coupe la médiatrice en S ;
On ne conserve que l'arc $\widehat{RS}$;
On fait le même travail à partir de V.
On n'utilise bien que 7 centres : A , B, C, D, H, B' et C' (les symétriques respectifs de A , B et C).



Exercice n°6 Un problème épineux

5 points

1. **Première solution calculatoire.**



Soit I le milieu du segment $[BD]$.
La droite (IC) est la médiatrice du segment $[BD]$ car le triangle BDC est isocèle au point C.
Le triangle BIC est donc rectangle en I et le théorème de Pythagore fournit :

$$IC = \sqrt{BC^2 - IB^2} = \sqrt{153^2 - 72^2} = 135$$

Le triangle ABD est rectangle en A : I est donc le centre du cercle circonscrit, d'où l'égalité $IA = IB = 72$.
Bilan : $AC = 135 + 72 = 207$. Le sapin ne rentrera donc pas debout.

2. **Deuxième méthode via un dessin.**
A l'échelle 1/10, on peut réaliser un schéma du sapin. En effet, le point A étant donné sur une droite $\mathscr{D}$ figurant le sol, on place le point I sur la demi droite faisant un angle de 45 degrés avec l'horizontale, et situé à 7,2 cm de A. De là, on obtient les points B et D en prenant les intersections de la droite perpendiculaire en I à (AI) avec les droites horizontale et verticale issues de A. Le point C s'obtient en construisant le triangle CDB isocèle en C. La mesure du segment $[AC]$ sur la figure ainsi obtenue permet une estimation de la longueur réelle du mât.

Exercice n°7 Jeu, sets et maths ...

8 points

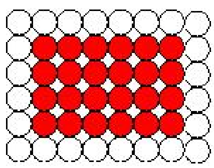
Posons x le nombre de cercles sur la longueur et y le nombre de cercles sur la largeur $(x \geqslant y)$.
Le nombre total de cercles est xy.
Le nombre de cercles blancs est $2x + 2y - 4$.
Le nombre de cercles rouges est égal à $\frac{1}{2}xy$.

On cherche à résoudre l'équation $\frac{1}{2}xy = 2x + 2y - 4$, soit $xy = 4x + 4y - 8$.

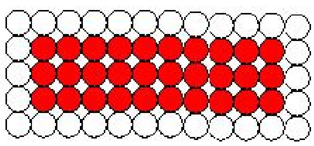
Méthode experte :
$4x + 4y - 8 = xy \iff (x-4)(y-4) = 8$
Il y a quatre chemins pour écrire 8 comme produit de deux entiers : 4×2 et 8×1 qui correspondent aux solutions : les couples $(x\ ;\ y)$ sont $(8\ ;\ 6)$ et $(12\ ;\ 5)$.

Méthode pour les élèves :
$4x + 4y - 8 = xy \iff y = \dfrac{8}{x-4} + 4$.
En utilisant le tableur de la calculatrice, on obtient le tableau ci-contre.

x	y
1	1.33
2	0
3	−4
4	ERROR
5	12
6	8
7	6.67
8	**6**
9	5.6
10	5.33
11	5.14
12	**5**
13	4.89
14	4.8



8 × 6

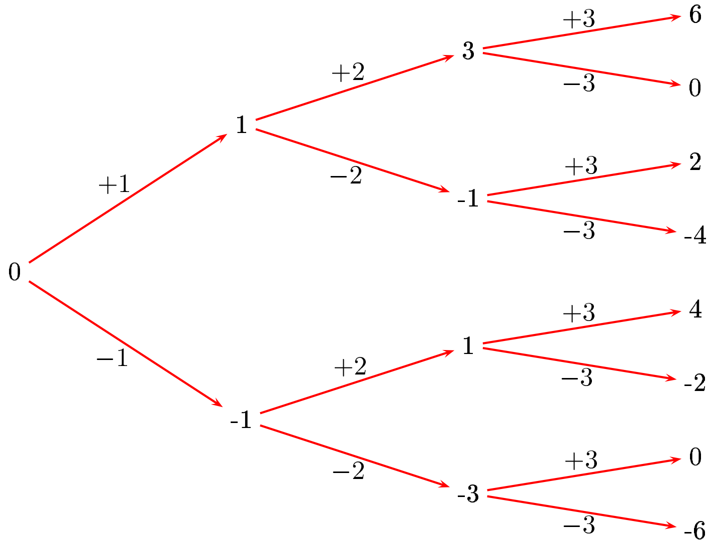


12 × 5

Exercice n°8 **Objectif 2009 !**

12 points

1. Pour répondre à ces questions, on peut par exemple dessiner un arbre qui représente tous les chemins possibles pour la sauterelle.



Donc on voit qu'il est impossible pour la sauterelle d'aterrir sur 3 au 3ème bond.

On peut atterrir sur 4 au 4ème bond. Il y a deux chemins :

$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{-3} 0 \xrightarrow{+4} 4$ et $0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{-2} -3 \xrightarrow{+3} 0 \xrightarrow{+4} 4$

On peut aussi atterrir sur 8 au 8ème bond. Par exemple :

$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{-3} 0 \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{-5} -1 \xrightarrow{-6} -7 \xrightarrow{+7} 0 \xrightarrow{+8} 8$.

2. (a) Il y a 3 chemins possibles pour atteindre 5 en 5 bonds.

   1er chemin : $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-3} -4 \xrightarrow{+4} 0 \xrightarrow{+5} 5$;

   2ème chemin : $0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{+2} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{-4} 0 \xrightarrow{+5} 5$;

   3ème chemin : $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{-5} 5$;

   (b) Pour atteindre 9 en 4 bonds supplémentaires, elle peut par exemple : $0 \xrightarrow{\cdots} \ldots \xrightarrow{\cdots} 5 \xrightarrow{-6} -1 \xrightarrow{-7} -8 \xrightarrow{+8} 0 \xrightarrow{+9} 9$;

3. Si la sauterelle se trouve en N au N-ième bond alors :
   - En faisant un bond de longueur $N+1$ vers l'arrière, elle atterrit en -1.
   - Puis en faisant un bond de longueur $N+2$ encore vers l'arrière, elle atterrit en $-N-3$.
   - En faisant ensuite un bond de longueur $N+3$ vers l'avant, elle atterrit en 0.
   - Enfin en faisant un bond de longueur $N+4$ vers l'avant, elle atterrit en $N+4$.

   $0 \xrightarrow{\cdots} \ldots \xrightarrow{\cdots} N \xrightarrow{-(N+1)} -1 \xrightarrow{-(N+2)} -N-3 \xrightarrow{+(N+3)} 0 \xrightarrow{+(N+4)} N+4$;

4. $2009 = 502 \times 4 + 1$

   Donc comme la sauterelle peut atteindre 1 en 1 bond elle peut atteindre 5 puis 9 puis 13 puis 17 ... puis 2009. (d'après la question 3.) Donc elle peut atteindre 2009 en 2009 bonds.