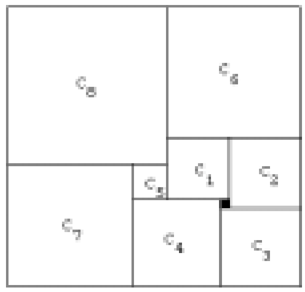
CORRIGÉ

Ex 1 Un pavage



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).
Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2**.
Le carré C_4 a pour côté **c + 3**.
(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)
Ceci permet de déduire que le carré C_5 pour côté **4**. Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1**.
On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :

$$(2c + 1) + (c + 1) + (c + 2) = 4c + 4.$$

Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4 = c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est :

$$(c + 7) + (c + 3) + (c + 2) = 3c + 12.$$

Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11**.

Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

$$4c + 4 \text{ et } (c + 7) + (c + 11) = 2c + 18$$

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.

En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u**.

Ex 2 Les cubes

L'aire extérieure, en cm², d'un parallélépipède rectangle de dimensions (en cm) a , b et 1 (en cm) es t:

$$A = 2\,a\,b + 2\,b \times 1 + 2\,a \times 1 = 2(ab + a + b) \quad .$$

L'expression de A est "symétrique en a et b", on peut raisonner en imposant que a est inférieur ou égal à b .

1^ère^ question

$51 = 3 \times 17$, où 3 et 17 sont premiers.
$A = 100$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 100$;
$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b = 50$;
en ajoutant 1 membre à membre,
$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 51$
On a :
$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$
Ainsi,
$A = 100$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 3 \times 17$.

Puisque $(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et que $2 \leq a + 1 \leq b + 1$, on a forcément :
$(a + 1) = 3$ et $(b + 1) = 17$, donc $a = 2$ et $b = 16$.

Ainsi,

$A = 100$ est équivalent à $a = 2$ et $b = 16$.

Le nombre de cubes est alors $ab = 32$.

Après vérification, on peut conclure que
le parallélépipède a pour largeur $a = 2$ cm et pour longueur $b = 16$ cm , et que :

le nombre total de cubes utilisés est 32 .

2ème question

0,401 m² = 4010 cm ²

$A = 4010$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 4010$;

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b = 2005$;

en ajoutant 1 membre à membre,

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 2006$.

On a prouvé dans la 1ère question l'égalité $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

$A = 4010$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 2006$.

La décomposition de 2006 en produit de facteurs premiers est $2006 = 2 \times 17 \times 59$

On peut écrire $2006 = 2 \times (17 \times 59)$, $2006 = (2 \times 17) \times 59 = 17 \times (2 \times 59)$.

$(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et $2 \leq a + 1 \leq b + 1$,

or les seules décompositions de 2006 en produit d'entiers supérieurs ou égaux à 2 sont :

2×1003 , 34×59 et 17×118

Ainsi : « $A = 4010$ » est équivalent à

« $(a + 1) = 2$ et $(b + 1) = 1003$ » ou « $(a + 1) = 34$ et $(b + 1) = 59$ » ou « $(a + 1) = 17$ et $(b + 1) = 118$ »

« $A = 4010$ » est équivalent à « $a = 1$ et $b = 1002$ » ou « $a = 33$ et $b = 58$ » ou « $a = 16$ et $b = 117$ »

Si « $a = 1$ et $b = 1002$ » , le nombre total de cubes utilisés est : $1 \times 1002 = 1002$;

Si « $a = 33$ et $b = 58$ » , le nombre total de cubes utilisés est : $33 \times 58 = 1914$;

Si « $a = 16$ et $b = 117$ » , le nombre total de cubes utilisés est : $16 \times 117 = 1872$;

$1002 < 1872 < 1914$

Conclusion **Le nombre minimal de cubes utilisés est** $\boxed{\mathbf{1002}}$.

Ex 3 **<u>Le lièvre et la tortue</u>**

Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ». Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.

$2005 = 11 \times 182 + 3$

Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

Ex 4 **<u>Horizons entre Corse et Nice</u>**

1°) Le triangle OLM est rectangle en L, donc $(R + a)^2 = R^2 + d^2$
d'où $d^2 = 2aR + a^2$. [puisque OL = ON = R ; NM = a ; LM = d ; OM = R + a]

Il est important d'écrire toutes les longueurs (altitudes comme distances) dans la même unité, soit le kilomètre.

Alors : $d^2 = 1{,}708 \times 6370 + 0{,}854^2 = 10\,880{,}689\,316$ et ainsi
<u>d = 104,31 km</u> *(à un demi-mètre près)*.

Soit α l'angle LÔM, exprimé en radians ; on le trouve par la relation :
$\tan(\alpha) = d/R$; et la longueur de l'arc LN est alors égale à $\alpha.R$, soit :
$\alpha = 0{,}016\,373\,818$ et ***<u>LN = 104,301 km</u>***
La différence entre LM et l'arc LN vaut <u>environ 9 mètres</u>, moins de 0,01%.

2°) La valeur maximale de l'altitude est bien évidemment **<u>2710m</u>**.
On peut remarquer que L est quasiment situé à mi-distance entre B et N.

Précisons l'altitude *b* du point P situé sur (BC) et dans l'alignement de (ML), sans doute voisine de 854m. On peut donc admettre une approximation entre longueur de l'arc et distance « à vol d'oiseau », semblable à celle du 1°).

Le triangle OLP est rectangle en L.
Résolvons une équation d'inconnue *b*, du second degré (avec *b* en km) :
$b^2 + 2bR - (BN - d)^2 = 0$, soit $b^2 + 12740b - 11170{,}2614 = 0$
Ne considérons que la racine positive (en calculant avec le discriminant réduit) :
$b = -6370 + SQR(6370^2 + 11170{,}2614) = 0{,}8767$ km, soit **<u>*b'* = 877 m</u>**, valeur minimale de l'altitude d'un point visible sur les parois du Monte Cinto.
[avec SQR(x) pour exprimer Racine carrée de x, et *b'* la mesure en mètres de *b*]

<u>Étude supplémentaire :</u>
Selon qu'on prend 853 m, 854 m, ou 855 m comme altitude (depuis Nice), on trouve une distance LM successivement égale à :
104,25 km, 104,31 km, ou 104,37 km *(à 2m près)*.