Académie Orléans-Tours

Olympiades Académiques de Mathématiques

Corrigé de la Session 2002

Exercice 1

En notant I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$, les segments $[EI]$, $[EJ]$, $[FI]$ et $[FJ]$ sont alors des hauteurs d'un triangle equilatéral de côté 1 : il mesurent tous $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par suite, $EIFJ$ est un losange.
Il en résulte que les droites sécantes (AB) et (EI) du plan (ABE) sont respectivement parallèlles aux droites (CD) et (FJ) du plan (CDF) : ces deux plans sont donc parallèlles.
Puisque le losange $EIFJ$ est dans le plan médiateur des segments $[AB]$ et $[BC]$, la distance entre les deux plans (ABE) et(CDF) est aussi la hauteur h du losange.
Or les diagonales du losange $EIFJ$ mesurent $IJ = 1$ et $EF = \sqrt{2}$ (c'est la diagonale du carré $AECF$) : il a donc pour aire $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\, EF \times IJ = EI \times h$ ce qui donne $h = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Exercice 2

Notons V la vitesse de la colonie, v celle de la fourmi, en $cm \cdot s^{-1}$, et t_1 le temps en s mis par la fourmi à l'aller et t_2 celui qu'elle met pour le retour. La distance parcourue à l'aller est alors : $d_1 = v.t_1 = 50 + V.t_1$ donc : $t_1 = \dfrac{50}{v-V}$ et la distance parcourue au retour est : $d_2 = v.t_2 = 50 - V.t_2$ donc $t_2 = \dfrac{50}{v+V}$. Au total, la colonie a parcouru $50\,cm$ donc : $t_1 + t_2 = \dfrac{50}{V}$. On obtient ainsi : $\dfrac{1}{v-V} + \dfrac{1}{v+V} = \dfrac{1}{V}$ qui s'écrit : $v^2 - 2Vv - V^2$ d'où $(v-V)^2 - 2V^2 = 0$ et finalement $v = V(1+\sqrt{2})$.

Pour conclure, la distance parcourue est $50(1+\sqrt{2})\,cm$

Exercice 3

1. Quelle que soit la répartition choisie, puisque chaque numéro est compté trois fois, la somme des gains est : $3 \times (1+2+3+\cdots+9+10) = 165$. La moyenne des gains est donc égale à 16, 5.
2. Si tous les gains étaient ou égaux à 16, leur somme serait inférieure à 160. Comme elle vaut 165, il y a au moins un gain supérieur à 17.
3. Pour trouver une répartition dans laquelle tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 : on met à part le 1 et on répartit les 9 autres jetons par groupes de trois consécutifs ; chaque groupe a alors nécessairement une somme de 18 (car $55 = 1 + S_1 + S_2 + S_3 \leqslant 1 + 3 \times 18 = 55$).
   Or les partitions de 18 en 3 entiers distincts compris entre 2 et 10 sont : $10+6+2$ $\quad 10+5+3$ $\quad 9+7+2$ $\quad 9+6+3$ $\quad 9+5+4$ $\quad 8+7+3$ $\quad 8+6+4$ $\quad 7+6+5$
   Le choix de $10+6+2$ impose 9+5+4 et 8+7+3 et le choix de 10+5+3 impose 9+7+2 et8+6+4. Dans chaque cas, on peut fabriquer plusieurs solutions, par exemple : 1, 10, 6, 2, 9, 5, 4, 8, 3, 7 qui donnent les gains : 17, 18, 17, 16, 18, 17, 15, 18, 11, 18 tous inférieurs ou égaux à 18.
4. Supposons tous les gains inférieurs ou égaux à 17. En isolant le 1 et en groupant par 3 les autres jetons, la somme totale des numéros est alors inférieure à $1 + 3 \times 17 = 52$ ce qui est faux puiqu'elle vaut 55. Il y a donc au moins un gain supérieur ou égal à 18.

Exercice 4

1. La figure 1 montre une façon de placer quatre exemplaire de la pièce en T dans le damier.
2. Toute forme que l'on peut construire avec 9 petits carrés loge dans un rectangle de taille 1×9 ou 2×8 ou 3×7 ou 4×6 ou 5×5 donc loge toujours dans un rectangle 10×5 et le damier 10×10 en contient deux.
3. Les rectangles cités question précédente ont tous des tailles de la forme $a \times (10-a)$ et quatre copies d'un tel rectangle peuvent être posées sur le damier sans chevauchement (voir figure 2).
   Par contre, il est impossible de placer 5 « croix » (figure 3) sur le damier. En effet, les centres des croix sont obligatoirement dans le carré 6×6 obtenu en retirant des bandes de largeur 2 des bords du damier. En divisant ce carré 6×6 en quatre carrés 3×3, si on veut placer 5 croix, il faudra qu'un de ces carrés contienne au moins deux centres de croix , ce qui est impossible.

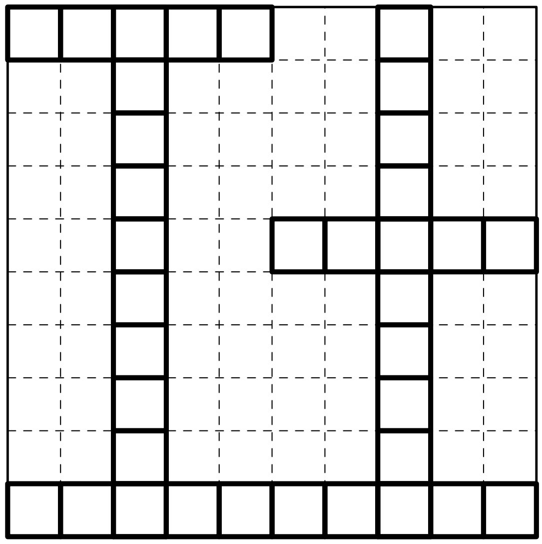

Fig. 1 – Placement de 4 nonaminos en té

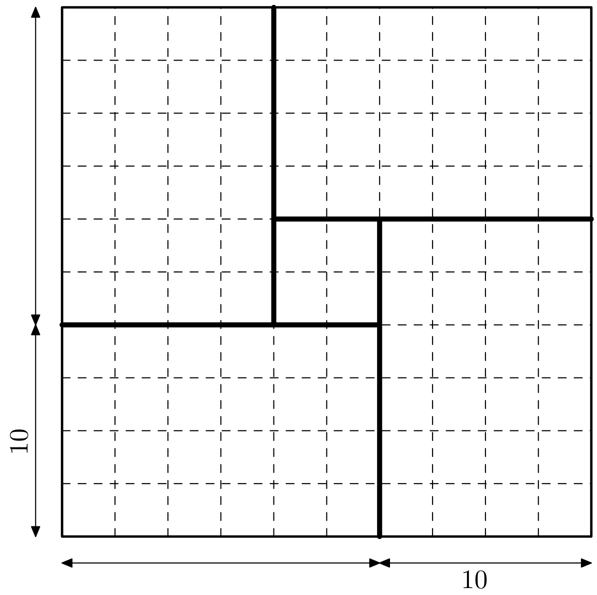

Fig. 2 – On peut placer 4 nonaminos

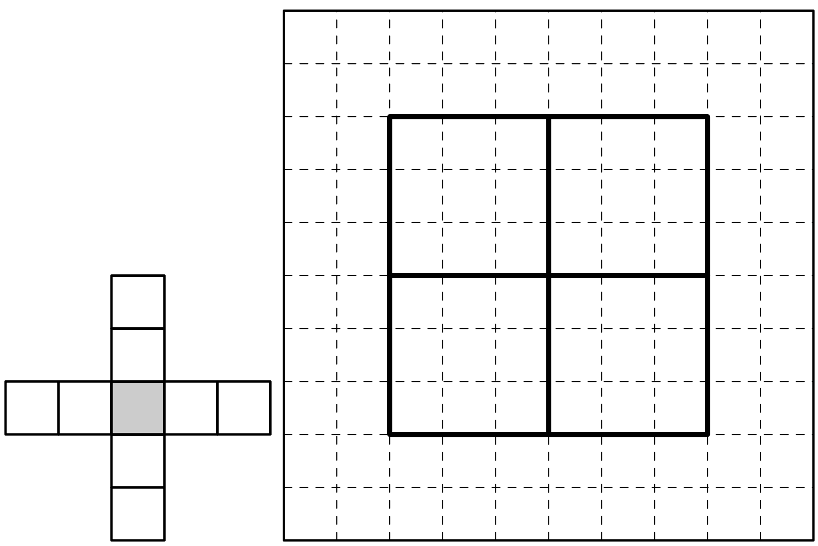

Fig. 3 – On ne peut pas placer 5 croix